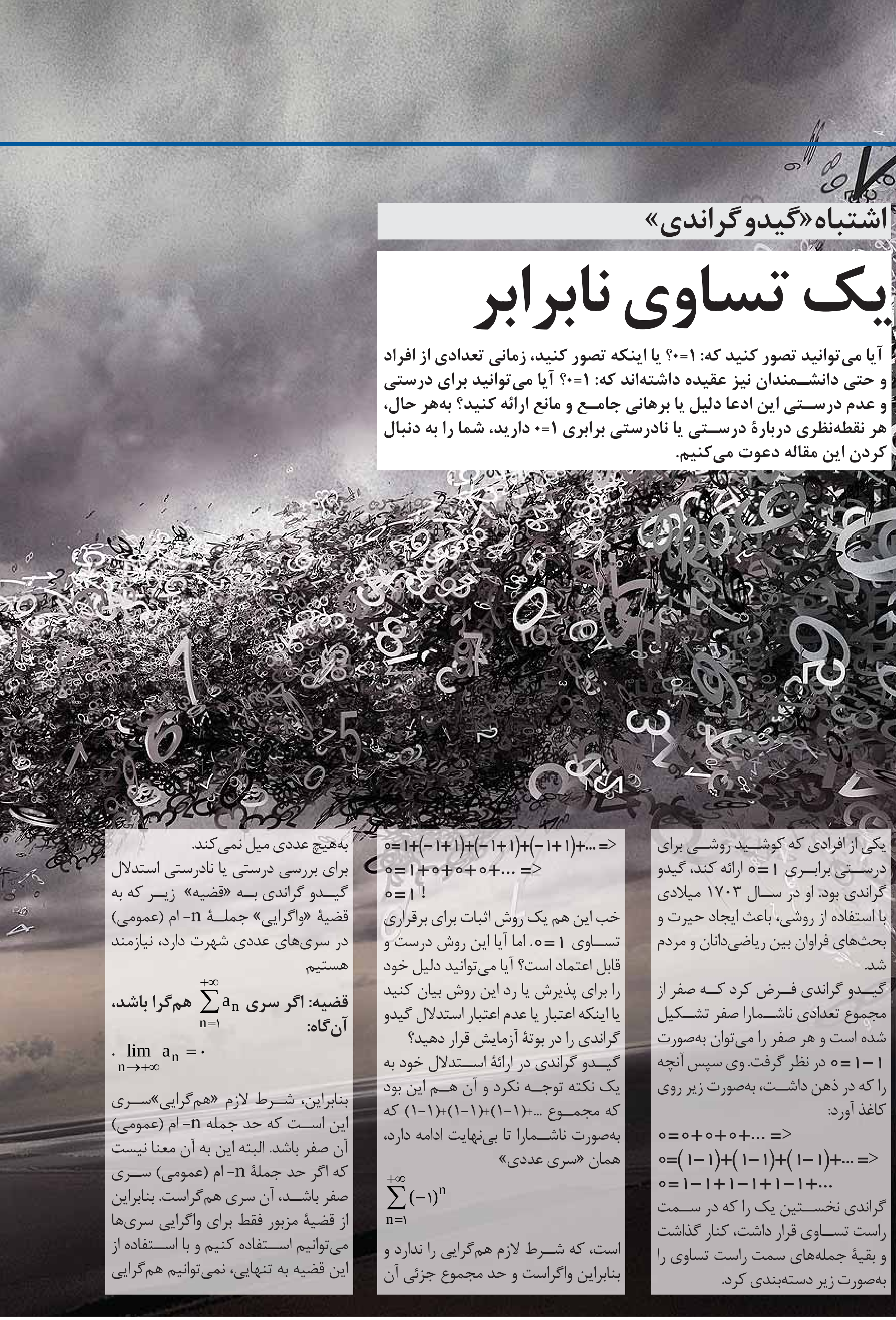
احسان یارمحمدی



اشتباه «گیدو گراندی»

یک تساوی نابرابر

آیا می‌توانید تصور کنید که: ۱=۰؟ یا اینکه تصور کنید، زمانی تعدادی از افراد و حتی دانشــمندان نیز عقیده داشته‌اند که: ۱=۰؟ آیا می‌توانید برای درستی و عدم درســتی این ادعا دلیل یا برهانی جامــع و مانع ارائه کنید؟ به‌هر حال، هر نقطه‌نظری دربارهٔ درســتی یا نادرستی برابری ۱=۰ دارید، شما را به دنبال کردن این مقاله دعوت می‌کنیم.

یکی از افرادی که کوشــید روشــی برای درســتی برابــری **۱=۰** ارائه کند، گیدو گراندی بود. او در ســال ۱۷۰۳ میلادی با استفاده از روشی، باعث ایجاد حیرت و بحث‌های فراوان بین ریاضی‌دانان و مردم شد.

گیــدو گراندی فــرض کرد کــه صفر از مجموع تعدادی ناشمارا صفر تشــکیل شده است و هر صفر را می‌توان به‌صورت **۱−۱=۰** در نظر گرفت. وی سپس آنچه را که در ذهن داشــت، به‌صورت زیر روی کاغذ آورد:

$$0=0+0+0+\dots \Rightarrow$$
$$0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \Rightarrow$$
$$0=1-1+1-1+1-1+\dots$$

گراندی نخســتین یک را که در ســمت راست تســاوی قرار داشت، کنار گذاشت و بقیهٔ جمله‌های سمت راست تساوی را به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد.

$$0=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots \Rightarrow$$
$$0=1+0+0+0+\dots \Rightarrow$$
$$0=1\ !$$

خب این هم یک روش اثبات برای برقراری تســاوی **۱=۰**. اما آیا این روش درست و قابل اعتماد است؟ آیا می‌توانید دلیل خود را برای پذیرش یا رد این روش بیان کنید یا اینکه اعتبار یا عدم اعتبار استدلال گیدو گراندی را در بوتهٔ آزمایش قرار دهید؟

گیــدو گراندی در ارائهٔ اســتدلال خود به یک نکته توجــه نکرد و آن هــم این بود که مجمــوع ...+(۱−۱)+(۱−۱)+(۱−۱) که به‌صورت ناشــمارا تا بی‌نهایت ادامه دارد، همان «سری عددی»

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$$

است، که شــرط لازم همگرایی را ندارد و بنابراین واگراست و حد مجموع جزئی آن به‌هیچ عددی میل نمی‌کند.

برای بررسی درستی یا نادرستی استدلال گیــدو گراندی بــه «قضیه» زیــر که به قضیهٔ «واگرایی» جملــهٔ n- ام (عمومی) در سری‌های عددی شهرت دارد، نیازمند هستیم

قضیه: اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\ .$$

بنابراین، شــرط لازم «همگرایی»ســری این اســت که حد جمله n- ام (عمومی) آن صفر باشد. البته این به آن معنا نیست که اگر حد جملهٔ n- ام (عمومی) ســری صفر باشــد، آن سری همگراست. بنابراین از قضیهٔ مزبور فقط برای واگرایی سری‌ها می‌توانیم اســتفاده کنیم و با اســتفاده از این قضیه به تنهایی، نمی‌توانیم همگرایی

سری‌ها را تعیین کنیم.

اکنون اگر با دقت به نحوهٔ اســتدلال گیدو گراندی بنگریم، نکتهٔ اصلی در محاسبه زیر است:

$$0=0+0+0+\dots \Rightarrow$$

$$0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \Rightarrow$$

$$0=1-1+1-1+1-1+\dots$$

چون در سمت راست تساوی

$$0=1-1+1-1+1-1+\dots$$

با سری

$$1-1+1-1+1-1+\dots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$$

برخورد می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$0=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$$

در ضمن چون می‌دانیم که:

$$0=0+0+0+\dots=\sum_{n=1}^{+\infty}0$$

پس اســتدلال گیدو گراندی به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}0=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$$

اما با اســتفاده از قضیه‌ای که در بالا بیان کردیم، به این نتیجه می‌رســیم که سری که در سمت چپ تساوی قرار دارد

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}0\right)$$

شــرط لازم هم‌گرایــی را دارد و در نهایت هم‌گــرا به صفر اســت. ولی ســری که در سمت راست تساوی قرار دارد

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\right)$$

به این علت که حد جملهٔ n-ام (عمومی) آن وجود ندارد، شرط لازم هم‌گرایی را ندارد و در نهایت واگراست. بنابراین نحوهٔ استدلال گیدو گراندی به این علت که وی سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$$

را هم‌گرا به عدد ۱ انگاشــته است، که این موضوع با قضیهٔ ارائه شده در بالا در تناقض قرار دارد، نادرست است.